

Zagadnienie Aproksymacji

Wstęp

Bardzo często, w trakcie prac badawczych czy też przy rozwiązywaniu innych problemów, dysponujemy dyskretnym zbiorem punktów pomiarowych. Poznaliśmy do tej pory interpolację, która umożliwiła połączenie tych punktów. Niestety, łatwo wyobrazić sobie setki problemów, gdzie interpolacja po prostu się nie sprawdza. Np. pomiar przyspieszenia w 100 punktach, i stworzeniu funkcji interpolującej nie będą miały wiele wspólnego z rzeczywistym jej przebiegiem – wielomian 100 stopnia nie odda ani kształtu ani fizycznej natury zjawiska, a często pomiary są niedokładne, więc żądanie dokładnego przechodzenia przez wszystkie punkty jest tym bardziej bezpodstawne. W celu rozwiązywania tego rodzaju problemów, stworzono znacznie szersze od interpolacji pojęcie: aproksymacja. W aproksymacji, niezależnie od ilości punktów reprezentujących zjawisko, używamy wielomianów niskiego stopnia, czy też sumy niewielkiej ilości składowych harmoniczných (dla funkcji okresowych). Nie przecinamy dokładnie wszystkich punktów, uzyskujemy za to wykres lepiej oddający naturę zjawiska, które najczęściej można opisać wielomianami 5 lub mniejszych stopni.

Aproksymacja wielomianami

Wstęp

Najbardziej naturalnym i często spotykanym przypadkiem jest sytuacji, gdy zjawisko można opisać wielomianem, a nasze jedyne zadanie to dobranie odpowiednich współczynników. Jako bazę musimy więc przyjąć pewien zbiór wielomianów, i właśnie ten wybór będzie wpływał na uwarunkowanie czy też łatwość implementacji.

Baza jednomianów

Pierwszą, najbardziej oczywistą bazą dla której można dokonywać aproksymacji jest baza kolejnych jednomianów. Takie rozwiązanie jest prostsze w implementacji, niestety pociąga za sobą szereg wad:

- Złe uwarunkowanie wielomianów takiej postaci
- Konieczność powtórnego rozwiązywania układu równań przy podwyższeniu stopnia wielomianu (zmianie ulegną wszystkie współczynniki)
- Dla wyższych stopni układ równań jest układem źle uwarunkowanym, co dodatkowo utrudnia obliczenia generując duże błędy.

Baza wielomianów ortogonalnych

Kolejną bazą wielomianową, dającą takie same wyniki w postaci wielomianu, ale znacznie lepiej uwarunkowana jest baza wielomianów ortogonalnych (znanych także jako wielomiany Czebyszewa). W bazie tej wielomiany dopasowujemy do istniejących punktów, dzięki temu wielomiany ortogonalne:

- Są lepiej uwarunkowane do obliczeń
- Możemy podnieść stopień wielomianu a dotychczasowe współczynniki się nie zmieniają.
- nie występuje problem złego uwarunkowania macierzy układu: jest ona diagonalna.

Aproksymacja funkcjami trygonometrycznymi

Aproksymacje takim funkcjami najczęściej stosujemy do przybliżania funkcji okresowych. Dzięki bazie złożonej z funkcji okresowych, aproksymacja ta pozwala łatwo przybliżyć przebieg funkcji na całej osi rzeczywistej. Dzięki tej własności takiej interpolacji nie używamy do modelowania zależności wielkości fizycznych, które z reguły są w postaci wielomianów, ale do przybliżania okresowych sygnałów w czasie. Dzięki temu możemy szybko zapisać sygnał próbkowany jako funkcje, lub też rozbić go na składowe harmoniczne.

Wnioski

- Obie metody interpolacji wielomianowej dają takie same funkcje, jednak macierz $D^T D$ w postaci diagonalnej zdecydowanie ułatwia dokonywanie obliczeń, sprawiając że metoda ta jest pod każdym względem efektywniejsza.
- W naszym przykładzie mieliśmy najprawdopodobniej z procesem opisanym równaniem drugiego stopnia, gdyż takiego stopnia wielomian najlepiej oddawał jej przebieg, bez wprowadzania dodatkowych wielomianów wyższych stopni co w praktyce nie miałyby sensu (bardzo mały zysk wydajności)
- Nie ma zastosowania metoda wielomianowa do funkcji okresowych, gdyż bardzo szybko straciłby ona jakąkolwiek dokładność
- Aproksymacja funkcjami okresowymi – obciętym szeregiem Fouriera jest najlepszym rozwiązaniem przy aproksymacji funkcji okresowych.
- Jeżeli tylko znamy naturę zjawiska – postać funkcji którą chcemy aproksymować, to jest to najważniejsza informacja: jak widać w ostatnim przykładzie z pliku mcd, nawet zmniejszenie odchylenia standardowego poprawiło tylko oddawanie przez funkcje aproksymująca tych punktów a nie całego przebiegu.