

Całkowanie Numeryczne

Dane do obliczeń:

$$f(x) := e^{-x^2} \quad \text{Niecałkowalna symbolicznie funkcja}$$

Numeryczna wartość całki obliczona przez MathCADa

$$\text{INTEGRAL} := \int_0^1 f(t) dt$$

Ciąg do generacji wykresów:

$$z := 0, 0.01..1$$

Kwadratury proste

Metoda prostokątów(prosta, punkt w srodku przedziału)

$$\text{pprostokat}(a, b) := f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)$$

Metoda trapezów (prosta):

$$\text{ptrapez}(a, b) := \frac{f(a) + f(b)}{2} \cdot (b-a)$$

Metoda Simpsona(prosta):

$$\text{psimpson}(a, b) := \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6} \cdot (b-a)$$

Kwadratury złożone

Metoda prostokątów (złożona)

Idea:

$$\sum_{i=0}^{\text{ile}-1} \text{pprostokat}[a + i \cdot h, a + (i+1) \cdot h]$$

Implementacja

$$\text{zprostokat}(a, b, \text{ile}) := \begin{cases} h \leftarrow \left(\frac{b-a}{\text{ile}}\right) \\ \sum_{i=0}^{\text{ile}-1} \left(h \cdot f\left(a + i \cdot h + \frac{h}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Metoda trapezow (złożona)

Idea:

$$\sum_{i=0}^{ile-1} \text{ptrapez}[a + i \cdot h, a + (i + 1) \cdot h]$$

Implementacja

$$\text{ztrapez}(a, b, ile) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \left(\frac{b - a}{ile} \right) \\ \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \text{if} \left(ile - 1 > 0, \sum_{i=1}^{ile-1} f(a + i \cdot h), 0 \right) \right) \cdot h \end{array} \right.$$

Metoda Simpsona (złożona)

Idea:

$$\sum_{i=0}^{ile-1} \text{psimpson}[a + i \cdot h, a + (i + 1) \cdot h]$$

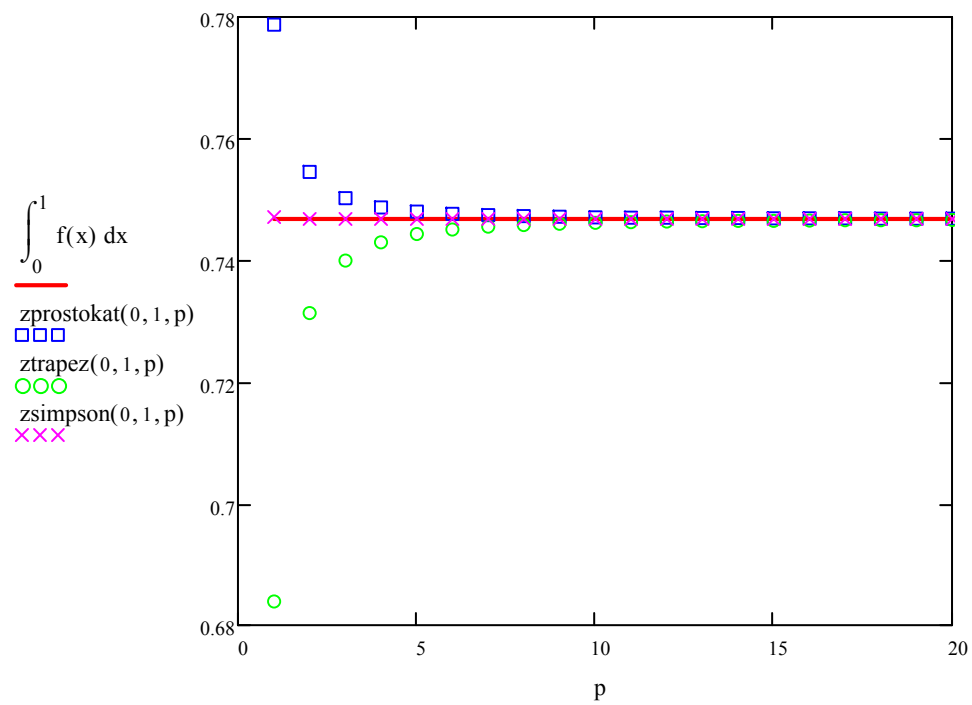
Implementacja

$$\text{zsimpson}(a, b, ile) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \left(\frac{b - a}{ile} \right) \\ \text{result} \leftarrow f(a) + f(b) \\ \text{result} \leftarrow \text{result} + \text{if} \left[ile - 1 > 0, 2 \left(\sum_{i=1}^{ile-1} f(a + i \cdot h) \right), 0 \right] \\ \text{result} \leftarrow \text{result} + 4 \left(\sum_{i=0}^{ile-1} f \left(a + i \cdot h + \frac{h}{2} \right) \right) \\ \text{result} \leftarrow \frac{\text{result}}{6} \cdot h \\ \text{result} \end{array} \right.$$

W powyższych 2 funkcjach należy zwrócić uwagę na funkcję if, zapobiega ona obliczeniu sumy od 1 do 0 w sytuacji gdy argumenty środkowe nie istnieją

Pokaże teraz jak zachowują się kolejne przybliżenia całki na przedziale [0,1], w zależności na ile podprzedziałów rozbijemy w całkowaniu złożonym:

p := 1..20 Ciąg punktów reprezentujący ilość podprzedziałów



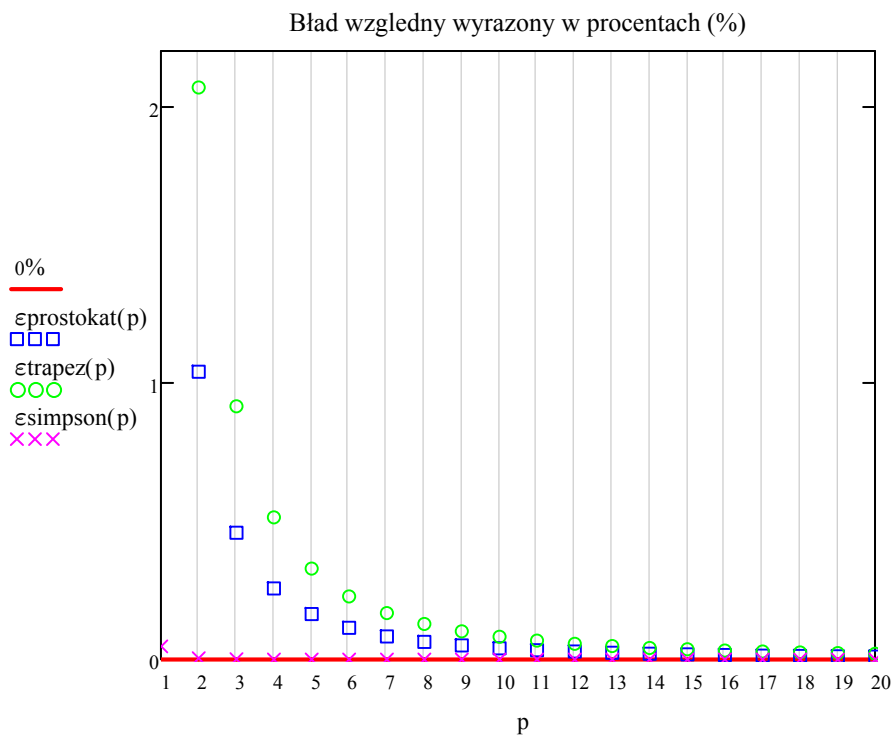
Narysuj jeszcze wykres błędów względnych, w tym celu stworzę proste funkcje pomocnicze.

$$\epsilon_{\text{prostokat}}(\text{ile}) := \left| \frac{\text{INTEGRAL} - \text{zprostokat}(0, 1, \text{ile})}{\text{INTEGRAL}} \right| \cdot 100 \quad \epsilon_{\text{prostokat}}(2) = 1.041$$

$$\epsilon_{\text{trapez}}(\text{ile}) := \left| \frac{\text{INTEGRAL} - \text{ztrapez}(0, 1, \text{ile})}{\text{INTEGRAL}} \right| \cdot 100$$

$$\epsilon_{\text{simpson}}(\text{ile}) := \left| \frac{\text{INTEGRAL} - \text{zsimpson}(0, 1, \text{ile})}{\text{INTEGRAL}} \right| \cdot 100$$

Wartości pomnożono przez 100 żeby wynik był w %



Metoda Romberga

Idea metody Romberga

W macierzy, w pierwszy wiersz wpisujemy zadana ilosc przyblizen z metody trapezow, nalezy pamietac ze macierz w gornym wierszu nie moze miec wiecej przyblizen niz ma wierszy z kolejnymi przyblizeniami z trapezow. dlatego z reguly macierz rozbudowuje sie dynamicznie, my zas po prostu bedziemy ja ewentualnie tworzyć od nowa wieksza.

```

filltrapezy(a, b, ile) :=
  for i ∈ 0..ile - 1
    Ai,0 ← ztrapez(a, b, 2i)
    for j ∈ 1..ile - 1
      Ai,j ← 0
  A
  
```

Dla lepszego zrozumienia bede wypisywal wyniki dla macierzy 6x6

RG := filltrapezy(0, 1, 5)

$$RG = \begin{pmatrix} 0.68394 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.73137 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.74298 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.74587 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.74658 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Wypelnianie kolejnej kolumny o numerze num indeksowane od 0, przy zalozeniu ze

poprzednia już wypełniona:

```
fillcol(num, M) := | ilewyrazow ← rows(M) – num
                   | A ← M
                   | for i ∈ 0..ilewyrazow – 1
                   |   Ai, num ← Ai+1, num-1 +  $\frac{A_{i+1, num-1} - A_{i, num-1}}{4^{num} - 1}$ 
                   | A
```

Druka kolumna:

```
RG := fillcol(1, RG)
```

$$RG = \begin{pmatrix} 0.68394 & 0.74718 & 0 & 0 & 0 \\ 0.73137 & 0.746855 & 0 & 0 & 0 \\ 0.742984 & 0.746826 & 0 & 0 & 0 \\ 0.745866 & 0.746824 & 0 & 0 & 0 \\ 0.746585 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Trzecia:

```
RG := fillcol(2, RG)
```

$$RG = \begin{pmatrix} 0.68393972 & 0.74718043 & 0.74683371 & 0 & 0 \\ 0.73137025 & 0.74685538 & 0.74682417 & 0 & 0 \\ 0.7429841 & 0.74682612 & 0.74682413 & 0 & 0 \\ 0.74586561 & 0.74682426 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7465846 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Kolejne kolumny obliczamy z aż zostanie nam tylko jeden wyraz (gdy przyjmujemy sztywną ilość wierszy, lub aż błąd kolejnych przybliżeń (czyli wyrazów w 1 wierszu) będzie mniejszy od tolerancji.

Składając powyższe funkcje otrzymujemy metodę całkującą romberkiem na zadanym przedziale z i zadaną maksymalną ilością wierszy w macierzy.

TOL := 10^{-8}

```
Romberg(a, b, ile) := | M ← filltrapezy(a, b, ile)
                     | for i ∈ 1..ile – 1
                     |   | M ← fillcol(i, M)
                     |   |   [return (M0,i "tol")] if |M0,i – M0,i-1| < TOL
                     |   (M0,i "ile")
```

$$\text{INTEGRAL} = \text{Romberg}(0, 1, 4)_{0,0} = 1.143 \times 10^{-7}$$

Romberg(0,1,4)_{0,1} = "ile"

INTEGRAL – Romberg(0,1,5)_{0,0} = -2.827×10^{-10}

Romberg(0,1,5)_{0,1} = "ile"

INTEGRAL – Romberg(0,1,6)_{0,0} = 1.835×10^{-13}

Romberg(0,1,6)_{0,1} = "tol"

Jak widac aby osiagnac żadana tolerancje wystarczylo uzyc macierzy o rozmiarze 5x5, natomiast przyblizony warunek roznicy kolejnych przyblizen spelniono dopiero dla macierzy 6x6. Macierz 4x4 zwrocila nniedokladny wynik, gdyz ograniczenie rozmiaru macierzy dalo jej za malo danych.

Przykladowa, wypelniona do konca macierz 5x5 zawierajaca roznice kolejnych przyblizen w stosunku do orginalnej wartosci.

$$\begin{pmatrix} -0.063 & 3.563 \times 10^{-4} & 9.577 \times 10^{-6} & -1.143 \times 10^{-7} & 2.827 \times 10^{-10} \\ -0.015 & 3.125 \times 10^{-5} & 3.71 \times 10^{-8} & -1.65 \times 10^{-10} & 0 \\ -3.84 \times 10^{-3} & 1.988 \times 10^{-6} & 4.172 \times 10^{-10} & 0 & 0 \\ -9.585 \times 10^{-4} & 1.246 \times 10^{-7} & 0 & 0 & 0 \\ -2.395 \times 10^{-4} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$