

Interpolacja funkcji

1. Wstęp teoretyczny

W trakcie przetwarzania informacji na maszynach cyfrowych często dysponujemy tylko przybliżeniem funkcji, z reguły reprezentowanym przez skończoną ilość punktów. Często chcemy z syntezywać na ich podstawie funkcję/jej przybliżenie. Stosujemy w tym celu kilka metod, tworzących proste w opisie funkcje, które w zadanych argumentach przyjmują zadane wartości. Właśnie warunek przyjmowania wartości funkcji w WSZYSTKICH punktach często powoduje nadmierną złożoność funkcji interpolującej, co odróżnia interpolację od aproksymacji. Więcej szczegółów odnośnie właściwości funkcji interpolującej oraz złożoności jej wyznaczania jest charakterystyczne dla danej metody co opisze poniżej.

2. Interpolacja wielomianami.

Pierwszą opisywaną metodą interpolacji jest interpolacja za pomocą wielomianów. Układając układ równań mający na celu wyznaczenie współczynników wielomianu interpolującego łatwo zauważyć, że na podstawie Kroneckera - Capelliego istnieje dokładnie jedno jednoznaczne rozwiązanie funkcji $f(x)$ i n węzłów interpolacji możemy wyznaczyć wielomian stopnia n , który w każdym węźle x_i posiada dokładnie wartość $f(x_i)$. Istnieją dwie powszechnie używane metody służące do wyznaczania współczynników wielomianu interpolującego.

a) Interpolacja Lagrange'a

Pierwszą metodą jest metoda Lagrange'a, którą używamy przede wszystkim z względu na łatwość obliczeń „na papierze” jak i łatwość implementacji tej metody niezależnie od języka programowania. W najogólniejszej postaci, przyjmując węzły $x_0, \dots, x_n$ otrzymamy wielomian interpolujący wg wzoru:

$$W_n(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

b) Interpolacja Newtona

Druga poznana przez nas metodą znajdowania wielomianu interpolacyjnego jest metoda Newtona. Pomimo iż jest ona trudniejsza w implementacji, i wymaga większej ilości oddzielnych „kroków”, jest dużo lepiej uwarunkowana numerycznie, przez co warta poznania pod kątem stosowania jej na maszynach cyfrowych. W metodzie tej musimy najpierw wyznaczyć odpowiednie ilorazy różnicowe korzystając z macierzy, a dopiero później obliczyć interpolowaną funkcję z ich użyciem. Ilorazy różnicowe wyznaczamy korzystając z wzoru rekurencyjnego, który najlepiej ilustruje macierz trójkątna, w której pierwszą kolumnę tworzą wartości funkcji interpolowanej, a kolejne kolumny są coraz krótszymi kolumnami zawierającymi kolejne rzędy ilorazów różnicowych. Po wyznaczeniu kolejnych ilorazów możemy skorzystać z gotowego wzoru

interpolacyjnego:

$$W_n(x) = f(x_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(x) f(x_{0,\dots,x_{n+1}})$$

c) Problem optymalnego doboru węzłów interpolacji.

W sytuacji, gdy dysponujemy funkcją zadaną w postaci analitycznej, lub dużą ilością punktów pomiarowych bardzo ważnym problemem jest wybranie punktów, które wraz z odpowiadającymi im wartościami uznamy za węzły interpolacji. Dla podziału równoodległego otrzymujemy stosunkowo niewiele punktów na krawędziach przedziału, przez co wielomian interpolacyjny zdecydowanie odbiega tam od właściwej wartości funkcji, i stan ten pogarsza się przy zagęszczeniu węzłów równoodległych. Zjawisko to, opisanie przez Carla Runge'go powoduje, że aby zwiększyć dokładność interpolacji musimy zmienić rozkład punktów. Problem ten sformułował rosyjski matematyk P.L. Czebyszew, jako problem znalezienie wielomianu, który najlepiej przybliżałby zero na danym przedziale. Rozwiązanie tego problemu dla przedziału $[-1,1]$ z $n+1$ węzłami jest poza brzegami przedziału

zbiór pierwiastków postaci $x_m = \cos(\frac{2m+1}{2n}\pi)$, gdzie m zmienia się od zera do

$n-1$, który łatwo „przeskalować” na dowolny przedział $[a,b]$, na którym interpolujemy daną funkcję za pomocą wzoru:

$$x_m = \frac{(b-a)}{2} \cos(\frac{2m+1}{2n}\pi) + \frac{(a+b)}{2}, \text{ gdzie współczynnik } \frac{(b-a)}{2} \text{ rozciąga zbiór}$$

wartości cosinusa na szerokość przedziału $[a,b]$, a człon $+\frac{(a+b)}{2}$ przesuwa

wszystkie pierwiastki tak aby cosinusowi o wartości 0 odpowiadał środek naszego przedziału.

3. Interpolacja funkcjami sklejanymi.

Kolejnym sposobem interpolacji, zwłaszcza użytecznym do stosowania na maszynach cyfrowych jest interpolacja funkcjami sklejanymi. Jest to interpolacja poprzez połączenie każdej pary węzłów interpolacji odrębną funkcją (wielomianem) tak, aby funkcja i odpowiednia ilość pochodnych były ciągłe, i od ograniczeń na tą funkcję nałożonych (ciągłość ilu pochodnych musi zachowywać) zależy, z jakim rodzajem funkcji sklepanych mamy do czynienia.

a) Funkcje sklepane stopnia pierwszego

Najprostsza metoda interpolacji funkcjami sklejanymi, stosowana od bardzo dawna nawet przez dzieci to interpolacja funkcjami liniowymi, graficznie sprowadzająca się do połączenia węzłów interpolacji odcinkami prostymi. Analitycznie również wyznaczenie takich funkcji liniowych jest bardzo proste, i w dodatku kolejne przedziały są niezależne: czyli dla każdego przedziału możemy wyznaczyć funkcję interpolującą opierając się tylko na 2 sąsiednich węzłach. Niestety powoduje to utracenie przez funkcję interpolującą tak podstawowej i pożądanej cechy jak ciągłość pochodnych.

b) Funkcje sklepane stopnia 3

Rozwiązaniem problemu nieciągłych pochodnych było zastosowanie funkcji sklepanych 3 stopnia, gdzie na każdym przedziale funkcję interpolujemy za

pomocą osobnego wielomianu stopnia 3, dbając o ciągłość zarówno pierwszej jak i drugiej pochodnej. Dla $n+1$ węzłów interpolacji musimy więc wyznaczyć przebieg funkcji wewnątrz n przedziałów, co oznacza konieczność wyznaczenia $n \cdot 4$ współczynników (ax^3+bx^2+cx+d). Z warunku ciągłości funkcji, pierwszej i drugiej pochodnej, co daje $3n-3$ współczynniki oraz wartości funkcji w $n+1$ punktach, co daje łącznie $4n-2$ równań. Aby funkcja sklejana była jednoznacznie określona musimy przyjąć dodatkowe dwa równania. Możemy to zrobić na kilka sposobów:

- dla funkcji okresowych, o okresie takim jak przedział interpolacji, najlepiej uznać punkty brzegowe za wspólny punkt, w którym muszą zachodzić warunki ciągłości 1 i 2 pochodnej
- dla funkcji, dla których możemy w brzegach przedziału wyznaczyć wartości 1 pochodnej najlepiej po prostu z nich skorzystać
- dla pozostałych funkcji najlepiej stosować interpolacje funkcjami normalnymi, czyli na brzegach przedziału przyjąć wartość 2 pochodnej jako zero.

4. Wnioski z przeprowadzonych obliczeń.

- Pierwszym wnioskiem, jaki nasuwa mi się po przeprowadzeniu obliczeń jest stosunkowo duży błąd funkcji interpolującej w stosunku do funkcji oryginalnej. Niezależnie czy wybraliśmy węzły równoodległe czy Czebyszewa nie udało się moim zdaniem dobrze odwzorować funkcji na obszarze dużej zmienności (szpilka na zerze)
- Dla metod interpolacji wielomianami bardzo duże znaczenie ma optymalny dobór węzłów. Już przy 17 węzłach interpolacji efekt Runge'go na brzegach przedziału spowodował odchylenie do wartości mniejszej niż -100 czyli 2 rzędy wielkości większy błąd niż największą wartość funkcji na przedziale, nie mówiąc już o tym, że funkcja interpolowana miała mieć tam wartość bliską zero.
- Węzły Czebyszewa pozwalają zniwelować powyższy efekt, ale zmniejszają one tylko oszacowanie błędu a nie jego rzeczywistą wartość. Jako że zostały one określone dla funkcji stałej, nie uwzględniają one w żaden sposób przebiegu zmienności funkcji, powodując, że w okolicy środka przedziału interpolacja była równie zła jak dla węzłów równoodległych.
- Dla dużej ilości węzłów interpolacje wielomianowe stają się praktycznie bezużyteczne: generują funkcje słabo przybliżające badaną funkcję (przez efekt Runge'go) oraz bardzo źle uwarunkowane numerycznie (wielomiany b. wysokich stopni).
- Interpolacja funkcjami sklejanyymi pierwszego rzędu bardzo dobrze przybliża funkcję o gęsto rozmieszczonych węzłach. Przy takim rozmieszczeniu ilorazy różnicowe policzone na tych przedziałach są sobie bliskie, przez co funkcja nie wygląda na bardzo „łamaną”.
- Funkcje sklejane pierwszego stopnia są stosunkowo odporne na zaburzenia. Ewentualny błąd w pomiarze np. jednej wartości zakłóca wygląd funkcji interpolującej tylko w 2 przedziałach
- Funkcje sklejane tego stopnia nadają się więc do obliczeń wymagających stosunkowo niewielkiej dokładności, oraz dużej szybkości. W praktyce całkowanie metodą trapezów jest całkowaniem takiej funkcji sklejanej.
- Funkcje sklejane 3 stopnia bardzo dobrze oddają przebieg zmienności funkcji, podobnie jak wszystkie inne metody potrzebują jednak zagęszczenia węzłów interpolacji w obszarach dużej zmienności, aby móc wiernie te zmiany

odwzorować.

- Funkcje sklepane 3 stopnia również wymagają złożonych obliczeń, w dodatku ich liczba rośnie wraz z wzrostem ilości węzłów. Otrzymana funkcja, w przeciwieństwie do interpolacji wielomianowej jest dużo lepiej uwarunkowana do następnych obliczeń, gdyż sprawdzenie przedziału argumentu jak i wyliczenie wartości wielomianu 3 stopnia są łatwe.
- Złożoność interpolacji i wybór właściwej pod tym względem metody zależy w dużej mierze od tego w ilu punktach chcemy obliczać wartość naszej funkcji interpolowanej. Dla małych ilości punktów można stosować prostsze w implementacji wzory wymagające jednak większej ilości, często źle uwarunkowanych obliczeń. Dla dużych ilości najlepiej skorzystać z funkcji sklepanych, w zależności od potrzeb I lub III rzędu, gdzie po wyznaczeniu wzoru funkcji interpolującej obliczanie jej wartości dla dowolnego argumentu jest już łatwe.

Bibliografia:

Fortuna, Macukow – Metody Numeryczne

Bartłomiej Gudowski i Jarosław Wąs: opracowanie splajnów 1 i 3 rzędu.

oraz

Własne notatki z wykładu pani Ewy Dudek-Dyduch.