

Krzysztof Wesołowski
Automatyka i Robotyka
Grupa: środa, 14.00 - LD_3
Data: 29 X 2008

Miejsca zerowe funkcji nieliniowych

Dane do obliczeń

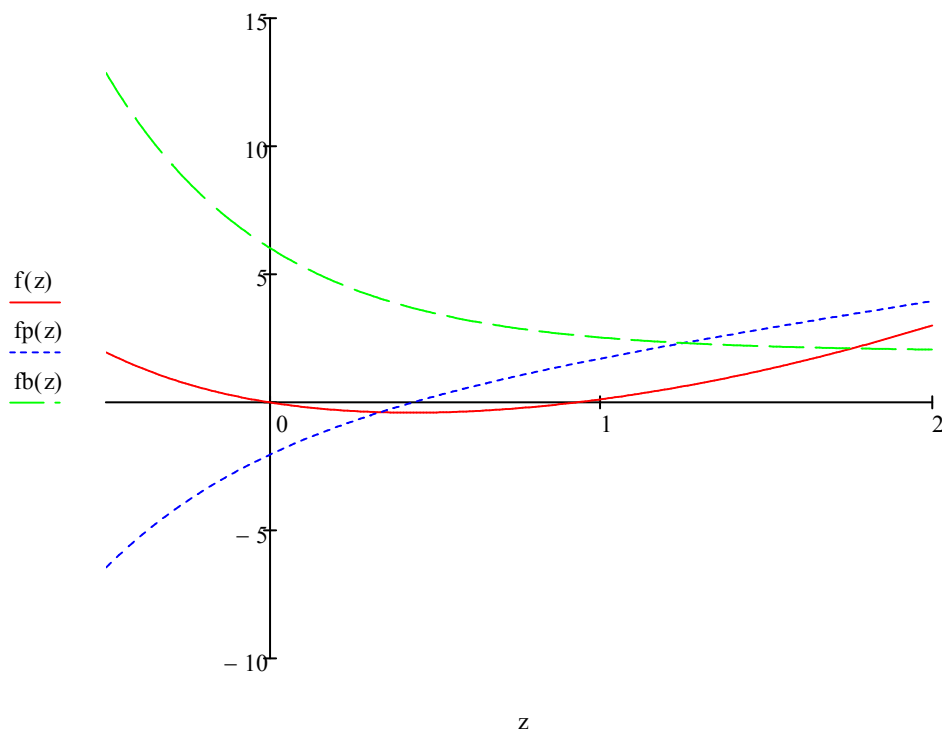
Poniżej zamieszczam dane do obliczeń, badana funkcję, jej kolejne pochodne, oraz zbiór punktów dla których narysujemy wykres

$$f(x) := e^{-2x} - 1 + x^2$$

$$z := \frac{-1}{2}, \frac{-1}{2} + 10^{-2} .. 2$$

$$fp(x) := \frac{d}{dx}(e^{-2x} - 1 + x^2)$$

$$fb(x) := \frac{d^2}{dx^2}(e^{-2x} - 1 + x^2)$$



Szkice wykresów funkcji, pierwszej pochodnej, drugiej pochodnej, Potrzebne aby móc przynajmniej graficznie sprawdzić czy funkcja spełnia założenia narzucone na nią przez daną metodę

Metoda bisekcji

Poniżej algorytm wyznaczania pierwiastka metodą bisekcji. Nie sprawdza on założeń, dlatego należy je sprawdzić przed jego użyciem.

TOL := 10^{-6}

Zadana dokladnosc

LIM := 50

Zabezpieczenie przed petla nieskonczona

```
bisekcja(p, k) :=  $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \leftarrow p \\ x_2 \leftarrow k \\ \text{licznik} \leftarrow 0 \\ \text{while } |x_1 - x_2| > \text{TOL} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} x \leftarrow \frac{x_1 + x_2}{2} \\ \text{return } \left( x \text{ licznik } \frac{|x_2 - x_1|}{2} \right) \text{ if } |f(x)| < \text{TOL} \\ \text{licznik} \leftarrow \text{licznik} + 1 \\ x_2 \leftarrow x \text{ if } f(x) \cdot f(x_1) < 0 \\ x_1 \leftarrow x \text{ if } f(x) \cdot f(x_2) < 0 \\ \text{return } \left( x \text{ licznik } \frac{|x_2 - x_1|}{2} \right) \text{ if } \text{licznik} \geq \text{LIM} \end{array} \right. \\ \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ licznik } \frac{|x_2 - x_1|}{2} \text{ "x2-x1 < dokld"} \right) \end{array} \right.$ 
```

Zalozenia dla przedzialu $(-0.49, 0.3)$:

1. Funkcja jest okreslona (brak problemu z dziedziną, narysowalismy wykres)
2. Funkcja jest ciagla bo jest zlozeniem funkcji elementarnych o ktorych wiemy ze sa ciagle
3. Zmiana znaku miedzy krancami przedzialu

$$f(-0.49) \cdot f(0.3) = -0.688$$

4. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek co widac z wykresu

$$\text{bisekcja}(-0.49, 0.3)^T = \begin{pmatrix} -4.3869 \times 10^{-7} \\ 18 \\ 1.50681 \times 10^{-6} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1. \text{ szukany pierwiastek (w przyblizeniu 0)} \\ 2. \text{ Liczba iteracji potrzebna do znalezienia} \\ 3. \text{ Maksymalny blad bezwzgledny} \\ 4. \text{ Przyczyna zakonczenia algorytmu} \end{array}$$

Dodatkowe obliczenia na zawezonym przedziale, zawieraja pierwiastek wiec zalozenia spelnione na szerszych przedzialach implikuja spelnienie zalozen a mniejszych (ponizej)

$$\text{bisekcja}(-0.11, 0.1)^T = \begin{pmatrix} 3.8147 \times 10^{-7} \\ 16 \\ 1.60217 \times 10^{-6} \end{pmatrix}$$

Założenia dla przedziału (0.6 , 1):

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
3. Zmiana znaku między końcami przedziału

$$f(0.6) \cdot f(1) = -0.046$$

4. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek co widać z wykresu

$$\text{bisekcja}(0.6, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 18 \\ 7.62939 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

1. szukany pierwiastek
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Maksymalny błąd bezwzględny
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

$$\text{bisekcja}(0.9, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 16 \\ 7.62939 \times 10^{-7} \end{pmatrix}$$

Metoda "regula fałsi"

Ponizej algorytm wyznaczania pierwiastka metodą "regula fałsi" Nie sprawdza on założeń, dlatego należy je sprawdzić przed jego użyciem.

$$\text{TOL} := 10^{-6}$$

Zadana dokładność

$$\text{LIM} := 50$$

Zabezpieczenie przed pętlą nieskończoną,

```

rfalsi(p,k) :=
  a ← p
  b ← k
  x ← a -  $\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ 
  lic ← 1
   $\left[ \text{return} \left( x \text{ lic } \frac{\text{TOL}}{fp(x)} \text{ "f(x)=0"} \right) \right]$  if  $|f(x)| < \text{TOL}$ 
  while 1 = 1
    b ← x if  $f(x) \cdot f(a) < 0$ 
    a ← x if  $f(x) \cdot f(b) < 0$ 
    x ← a -  $\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a)$ 
    lic ← lic + 1
     $\text{return} \left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "D<dokl"} \right)$  if  $\left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| < \text{TOL}$ 
     $\text{return} \left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "f(biez)=0"} \right)$  if  $|f(x)| < \text{TOL}$ 
     $\text{return} \left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "ilosc krokow"} \right)$  if  $\text{lic} \geq \text{LIM}$ 

```

Założenia dla przedziału $(-0.49, 0.3)$:

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
 2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
 3. Zmiana znaku między końcami przedziału
- $$f(-0.49) \cdot f(0.3) = -0.688$$
4. Stały znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_p
 5. Stały znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_b
 6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stała pochodna, wykres)

$$\text{rfalsi}(-0.49, 0.3)^T = \begin{pmatrix} 9.83861 \times 10^{-7} \\ 18 \\ 9.83863 \times 10^{-7} \\ \text{"D<dokl"} \end{pmatrix}$$

1. szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Maksymalny błąd bezwzględny
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

$$\text{rfalsi}(-0.11, 0.1)^T = \begin{pmatrix} 1.72828 \times 10^{-7} \\ 7 \\ 1.72828 \times 10^{-7} \\ \text{"D<dokl"} \end{pmatrix}$$

Założenia dla przedziału (0.6 , 1):

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
 2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
 3. Zmiana znaku między końcami przedziału
- $$f(0.6) \cdot f(1) = -0.046$$
4. Stały znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f'
 5. Stały znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f''
 6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stała pochodna, wykres)

$$\text{rfalsi}(0.6, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 5 \\ 6.40202 \times 10^{-7} \\ \text{"D<dokl"} \end{pmatrix}$$

1. szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Maksymalny błąd bezwzględny
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

$$\text{rfalsi}(0.9, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 4 \\ 3.39855 \times 10^{-7} \\ \text{"D<dokl"} \end{pmatrix}$$

Metoda siecznych

Poniżej algorytm wyznaczania pierwiastka metodą siecznych. Nie sprawdza on założeń, dlatego należy je sprawdzić przed jego użyciem.

TOL := 10^{-6}

Zadana dokładność

LIM := 50

Zabezpieczenie przed pętlą nieskończoną,

```

sieczne(p,k) :=
  x1 ← p
  x2 ← k
  lic ← 1
  while 1 = 1
    x ← x2 -  $\frac{f(x2)(x2 - x1)}{f(x2) - f(x1)}$ 
    x1 ← x2
    x2 ← x
    lic ← lic + 1
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ ""} \right)$  if  $|x2 - x1| < \text{TOL} \cdot 10^3 \wedge |f(x2)| > |f(x1)|$ 
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "błąd ilości kroków"} \right)$  if  $\text{lic} \geq \text{LIM}$ 
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "f(biez)=0"} \right)$  if  $|f(x)| < \text{TOL}$ 

```

Nie znalazłem sposobu na szacowanie wyzn pierwiastka w trakcie obliczeń, ale wzór w macierzy to jest poprawny zawsze, przy założeniu liniowości funkcji w otoczeniu pierwiastka, jednak nie nadaje się do normalnego algorytmu jako kryterium stopu z względu na złożoność obliczeniowa (podwajałby ją)

Założenia dla przedziału $(-0.49, 0.3)$:

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
 2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
 3. Zmiana znaku między końcami przedziału
- $$f(-0.49) \cdot f(0.3) = -0.688$$
4. Stały znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_p
 5. Stały znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_b
 6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stała pochodna, wykres)

$$\text{sieczne}(-0.49, 0.3)^T = \begin{pmatrix} 9.32063 \times 10^{-9} \\ 8 \\ 9.32063 \times 10^{-9} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

1. Szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Oszacowanie błęd (z pochodnej)
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

$$\text{sieczne}(-0.11, 0.1)^T = \begin{pmatrix} 2.86147 \times 10^{-7} \\ 5 \\ 2.86148 \times 10^{-7} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

Założenia dla przedziału (0.6 , 1):

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
 2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
 3. Zmiana znaku między końcami przedziału
- $$f(0.6) \cdot f(1) = -0.046$$
4. Stały znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_p
 5. Stały znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f_b
 6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stała pochodna, wykres)

$$\text{sieczne}(0.6, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 5 \\ 1.09264 \times 10^{-7} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

$$\text{sieczne}(0.9, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 4 \\ 7.45275 \times 10^{-8} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

1. Szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Oszacowanie błędów (z pochodnej)
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

Metoda stycznych

Poniżej algorytm wyznaczania pierwiastka metodą stycznych. Nie sprawdza on założeń, dlatego należy je sprawdzić przed jego użyciem.

TOL := 10^{-6}

Zadana dokładność

LIM := 50

Zabezpieczenie przed pętlą nieskończoną,

```

styczne(p,k) :=
  a ← p
  b ← k
  x ← b -  $\frac{f(b)}{fp(b)}$  if  $fp(b) \cdot fb(b)$ 
  x ← a -  $\frac{f(a)}{fp(a)}$  otherwise
  lic ← 1
  return  $\left( x \text{ lic } \frac{TOL}{fp(x)} \text{ "f(biez)=0"} \right)$  if  $|f(x)| < TOL$ 
  while 1 = 1
    prev ← x
    x ← x -  $\frac{f(x)}{fp(x)}$ 
    licznik ← licznik + 1
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "Bliski x"} \right)$  if  $|prev - x| < TOL$ 
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "blad ilosci krokow"} \right)$  if  $lic \geq LIM$ 
    return  $\left( x \text{ lic } \left| \frac{f(x)}{fp(x)} \right| \text{ "f(biez)=0"} \right)$  if  $|f(x)| < TOL$ 

```

Dokładniejsze oszacowanie błędu, w celach informacyjnych zamieszczam w zwanym wektorze, iteracje zas przerywa warunek normalnie stosowany

Zalozenia dla przedzialu $(-0.49, 0.3)$:

1. Funkcja jest okreslona (brak problemu z dziedziną, narysowalismy wykres

2. Funkcja jest ciagla bo jest zlozeniem funkcji elementarnych o ktorych wiemy ze sa ciagle

3. Zmiana znaku miedzy krancami przedzialu

$$f(-0.49) \cdot f(0.3) = -0.688$$

4. Staly znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widac na wykresie f_p

5. Staly znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widac na wykresie f_b

6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stala pochodna, wykres)

$$\text{styczne}(-0.49, 0.3)^T = \begin{pmatrix} -2.89842 \times 10^{-12} \\ 1 \\ 2.89846 \times 10^{-12} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

1. Szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Oszacowanie błędu (z pochodnej)
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

Założenia dla przedziału (0.6 , 1):

1. Funkcja jest określona (brak problemu z dziedziną, narysowaliśmy wykres)
2. Funkcja jest ciągła bo jest złożeniem funkcji elementarnych o których wiemy że są ciągłe
3. Zmiana znaku między końcami przedziału

$$f(0.6) \cdot f(1) = -0.046$$

4. Stały znak pierwszej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f'
5. Stały znak drugiej pochodnej, na tym przedziale co widać na wykresie f''
6. W danym przedziale istnieje tylko jeden pierwiastek (stała pochodna, wykres)

$$\text{styczne}(0.6, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 1 \\ 4.67039 \times 10^{-10} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$

1. szukany pierwiastek (w przybliżeniu 0)
2. Liczba iteracji potrzebna do znalezienia
3. Oszacowanie błędu (z pochodnej)
4. Przyczyna zakończenia algorytmu

$$\text{styczne}(0.9, 1)^T = \begin{pmatrix} 0.91656 \\ 1 \\ 4.67039 \times 10^{-10} \\ \text{"f(biez)=0"} \end{pmatrix}$$