

Numeryczne wyznaczanie pierwiastków równań nieliniowych

1. Metoda bisekcji

Pierwszą metodą poszukiwania pierwiastków równania nieliniowego jest metoda bisekcji. Funkcja ta wykorzystuje podstawowe własności funkcji ciągłej (przyjmowanie wszystkich wartości pośrednich). Aby móc z niej skorzystać dla pewnej funkcji $f(x)$, musimy spełnić kilka założeń charakterystycznych dla wszystkich omawianych tu metod jak i metody bisekcji:

a) określoność funkcji na przedziale $[a,b]$

w każdym punkcie należącym do tego przedziału musimy znać wartość funkcji, algorytm nie może napotkać wartości argumentu dla którego nie dałoby się obliczyć wartości funkcji.

b) ciągłość funkcji na przedziale $[a,b]$

Najważniejsze założenie, aktualne także w pozostałych metodach numerycznych tutaj omówionych. W połączeniu z kolejnymi założeniami pozwoli nam zastosować metodę bisekcji do poszukiwania pierwiastków

c) iloczyn $f(a) \cdot f(b) < 0$

Oznacza to zmieniający się znak funkcji na przedziale $[a,b]$. Wraz z założeniem z podpunktu b gwarantuje nam to założenie istnienie co najmniej jednego pierwiastka: $f(a) < 0 < f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b)$ takie że $f(c)=0$. Wraz z podpunktem b oznacza to że funkcja spełnia twierdzenie Cauchy'ego.

d) Istnienie dokładnie jednego pierwiastka w przedziale $[a,b]$

Metoda bisekcji byłaby w stanie znaleźć tylko jeden pierwiastek w danym przedziale, dlatego musimy skorzystać z innych metod aby dobrać odpowiedni przedział w którym będziemy poszukiwać pierwiastka.

Metoda ta pozwala iteracyjnie zmniejszać przedział w którym musi się znajdować pierwiastek, aż do momentu gdy szerokość przedziału uznamy za wystarczająco małą – czyli nie większa niż $2 \cdot \text{wymagana dokładność}$.

W pierwszym kroku algorytmu dzielimy nasz przedział na pół. Może się zdarzyć że tak wybrany punkt c będzie pierwiastkiem, przypadek ten jako trywialny nie wymaga dalszego omówienia. W przeciwnym wypadku otrzymamy 2 przedziały: (a,c) i (c,b) . Zgodnie z założeniami w jednym z nich znajduje się pierwiastek, a więc funkcja zmienia znak. Wybieramy właściwy obliczając wartość funkcji w punkcie c , i powtarzamy niniejszy algorytm dla zawężonego przedziału. W efekcie po n -tej iteracji otrzymamy przedział o szerokości $2^{-n} \cdot |b-a|$, zawierający nasz pierwiastek.

2. Metoda „Regula Falsi”

Kolejna metoda znajdowania przybliżonych pierwiastków równania liniowego. Jej Łacińska nazwę można tłumaczyć na 2 sposoby, jednak oba z grubsza oznaczają przybliżanie badanej funkcji funkcją liniową. Ta metoda również wymaga nałożenia ograniczeń na badaną funkcję. Przy założeniach skomentowanych już wcześniej pominię ten komentarz.

- a) **określoność funkcji na przedziale $[a,b]$**
- b) **ciągłość funkcji na przedziale $[a,b]$**
- c) **iloczyn $f(a) \cdot f(b) < 0$**
- d) **$f'(x)$ mieć stały znak na całym przedziale**
funkcja musi być monotoniczna, aby móc oszacować błąd i zapewnić sobie zbieżność w rozsądnej ilości kroków. Przy niespełnieniu tego założenia funkcja może być zbieżna dowolnie wolno.
- e) **$f''(x)$ mieć stały znak na całym przedziale**
Brak punktów przegięcia również jest wymagany w celu zapewnienia zbieżności w rozsądnej liczbie kroków, ustalenia stałego punktu iteracji oraz umożliwienia oszacowania błędu.
- f) **Istnienie dokładnie jednego pierwiastka w przedziale $[a,b]$**
w tym przypadku zastosowanie założenia d już gwarantuje to założenie (można by je pominąć)

Metoda ta działa zgodnie z własną nazwą, przybliżając badaną funkcję $f(x)$ funkcjami liniowymi. W pierwszym kroku łączymy linią prostą punkty $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, i otrzymujemy punkt c będący pierwszym przybliżeniem poszukiwanego pierwiastka. Następnie, analogicznie jak w metodzie bisekcji wybieramy właściwy przedział, i powtarzamy dla niego ten algorytm. Poza tym za każdym razem sprawdzamy czy środkowy punkt nie jest już wystarczająco dobrym przybliżeniem pierwiastka.

Jak widać metoda ta jest „rozsądniejszą” metodą bisekcji, wykorzystującą nie tylko informację o znakach, ale także o wartościach funkcji. Niestety ze względu na sposób konstruowania cięciw, jej zbieżność też nie jest zbyt szybka.

3. Metoda siecznych

Kolejną metodą jest metoda siecznych, będąca rozwinięciem metody „regula falsi”/cięciw o niejako ryzykowane, ale bardzo korzystne zawężanie przedziału w którym poszukujemy pierwiastka. Aby umożliwić sobie korzystanie i zapewnić zbieżność tej metody musi na funkcje nałożyć następujące ograniczenia.

- a) **określoność funkcji na przedziale $[a,b]$**
- b) **ciągłość funkcji na przedziale $[a,b]$**
- c) **iloczyn $f(a) \cdot f(b) < 0$**
w tym przypadku niespełnienie tego założenia nie uniemożliwia stosowania algorytmu (technicznie rzecz biorąc), co jest o tyle niebezpieczne że można wykryć i próbować przybliżać pierwiastek nieistniejący.
- d) **$f'(x)$ mieć stały znak na całym przedziale**
- e) **$f''(x)$ mieć stały znak na całym przedziale**
- f) **Istnienie dokładnie jednego pierwiastka w przedziale $[a,b]$**

Metoda ta jest rozwinięciem metody siecznych. Rezygnujemy w niej z założenia o wybieraniu punktów po przeciwnych stronach osi OX . Jak można było zauważyć, w poprzedniej metodzie, każda kolejna iteracja wykorzystywała stały punkt iteracji, nierzadko leżący daleko od poszukiwanego pierwiastka i nie dostarczający żadnych informacji o przebiegu funkcji w jego pobliżu. Metoda ta, po uzyskaniu dwóch pierwszych przybliżeń, jako kolejne przybliżenie (x_3) wybiera punkt łączący punkty $(x_1, f(x_1))$ oraz $(x_2, f(x_2))$. Dzięki temu każda kolejna iteracja pozwala nam korzystać z wartości funkcji w bliższym otoczeniu pierwiastka, dzięki czemu szybciej uda się nam go odnaleźć. Niestety,

w wzorze rekurencyjnym występuje dzielenie różnicy kolejnych przybliżeń przez wartość bardzo małą (różnice wartości funkcji między kolejnymi przybliżeniami), przez co ewentualne błędy zaokrągleń mogą się w jednej operacji skumulować, powodując znalezienie się kolejnego przybliżenia dalej niż dwa poprzednie. Z tego powodu, jako dodatkowe kryterium przerywania iteracji należy przyjąć malenie ciągu $|f(x_n)|$, tak aby przerwać obliczenia przy wystąpieniu takiej sytuacji zwracając najlepsze możliwe przybliżenie.

4. Metoda stycznych

Kolejną metodą poszukiwania pierwiastków rzeczywistych funkcji jest metoda stycznych, zwana również metodą Newtona. Pozwala ona znaleźć pierwiastek funkcji pod warunkiem że spełnia ona następujące założenia:

- a) określoność funkcji na przedziale $[a,b]$
- b) ciągłość funkcji na przedziale $[a,b]$
- c) iloczyn $f(a) \cdot f(b) < 0$
- d) $f'(x)$ mieć stały znak na całym przedziale
- e) $f''(x)$ mieć stały znak na całym przedziale
- f) Istnienie dokładnie jednego pierwiastka w przedziale $[a,b]$

Ta metoda również polega na przybliżaniu funkcji nieliniowej kolejnymi funkcjami liniowymi. W przeciwieństwie do poprzednich metod nie przybliżamy jej za pomocą cięciw/siecznych, ale stycznych. Wymaga to od nas znania wartości pochodnej badanej funkcji w punktach kolejnych przybliżeń, co powoduje, że jej stosowanie jest bardziej skomplikowane (np. trzeba oprogramować symboliczne liczenie pochodnej, gdyż jej numeryczne przybliżanie zwiększa złożoności każdego kroku) niż metody siecznych. W każdym kroku za kolejne przybliżenie przyjmujemy punkt przecięcia z osią OX stycznej do funkcji, obliczonej w poprzednim przybliżeniu. Przyjęte założenia, zwłaszcza **d** i **e** nie są absolutnie konieczne, ale tylko dzięki nim algorytm zachowuje się przewidywalnie. Dla tej metody ważne jest również aby pierwsze przybliżenie nie znajdowało się poza przedziałem $[a,b]$, dlatego iterację rozpoczynamy od punktu w którym f i f'' mają taki sam znak.

5. Wnioski

Zaimplementowałem wszystkie 4 algorytmy w programie MathCAD. Wszystkie dają poprawne rezultaty, ale aby ocenić ich jakość należałoby porównać ilość obliczeń które muszą zostać dokonane. Z tej przyczyny każda implementacja posiadała licznik iteracji, odpowiadający z grubsza ilości punktów w którym obliczono wartość funkcji. Poza tym metoda siecznych musi w każdym kroku obliczać również wartość pochodnej, której obliczanie, nawet po symbolicznym policzeniu wzoru, jest w przybliżeniu równie złożone jak obliczanie wartości samej funkcji. Pozostałe operacje są wobec poprzednich relatywnie proste. Poniżej zestawilem te wyniki

Metoda	Bisekcji				„Regula falsi”				Sieczne				Styczne			
Przedział	[-0.49, 0.3]	[-0.11, 0.1]	[0.6, 1.0]	[0.9, 1.0]	[-0.49, 0.3]	[-0.11, 0.1]	[0.6, 1.0]	[0.9, 1.0]	[-0.49, 0.3]	[-0.11, 0.1]	[0.6, 1.0]	[0.9, 1.0]	[-0.49, 0.3]	[-0.11, 0.1]	[0.6, 1.0]	[0.9, 1.0]
Miejsce Zerowe	0		0.91656		0		0.91656		0		0.91656		0		0.91656	
Ilość iteracji:	18	16	18	16	18	7	5	4	8	5	5	4	6	3	3	3
Ilość obliczeń	19	17	19	17	19	8	6	5	9	6	6	5	12	6	6	6

- a) Metoda bisekcji wymaga wielu obliczeń, ale dla niektórych funkcji można przewidzieć znak wyniku bez obliczania pełnej wartości, co może spowodować że metoda ta nie będzie aż tak kosztowna obliczeniowo jak może się wydawać.
- b) Metoda bisekcji posiada najmniej rygorystyczne założenia, a ilość iteracji jest w pełni zdeterminowana przez przedział początkowy i żadaną dokładność, przez co może znaleźć zastosowanie w systemach czasu rzeczywistego o twardych wymaganiach czasowych.
- c) Metoda ta nie poprawia zbyttno zbieżności nawet przy zawężeniu przedziału
- d) Metoda ta nie wymaga sprawdzania założeń, dzięki czemu łatwo ją zaimplementować. Sprawdzanie stałego znaku drugiej pochodnej jest nieporównywalnie trudniejsze.
- e) Złożoność metody „regula falsi” silnie zależy od przebiegu funkcji, jak pokazała nasza przykładowa funkcja ilość obliczeń jest ściśle zależna od badanej funkcji.
- f) W niektórych sytuacjach metoda ta jest gorsza niż metoda bisekcji, wymaga tyle samo obliczeń, a nakłada większe ograniczenia, ma trudniejsze oszacowanie błędu
- g) Metoda siecznych jest moim zdaniem najefektywniejsza metoda, każda obliczona wartość wykorzystuje dwukrotnie, dzięki czemu jej zbieżność jest niewiele wolniejsza od zbieżności metody stycznych, wymaga za to o połowę mniej obliczeń, nie musimy też w ogóle znać wartości pochodnej co jest szczególnie przydatne gdy analizujemy funkcje zadaną w postaci nieanalitycznej.
- h) Metoda stycznych choć zbiega bardzo szybko wymaga wyznaczanie pochodnej, i to w sposób symboliczny. Wyznaczanie jej numerycznie z ilorazu różnicowego postawiłoby tą metodę daleko za metodą siecznych pod względem ilości obliczeń, dlatego jedyne funkcje dla których możemy szukać miejsc zerowych to takie dla których możemy obliczyć pochodną.
- i) Szybkość otrzymania wyniku silnie zależy od przedziału początkowego, a dokładniej od tego jak dobrym przybliżeniem badanej na tym przedziale funkcji będą funkcje liniowe.
- j) Obliczenie pochodnej wymaga podobnej ilości czasu procesora co obliczenie wartości funkcji pierwotnej, dlatego każda iteracja w metodzie Newtona wymaga dwóch złożonych obliczeń wartości funkcji i wartości pochodnej.