Zadanie na zaliczenie z przedmiotu:

Procesy Stochastyczne

Autor:

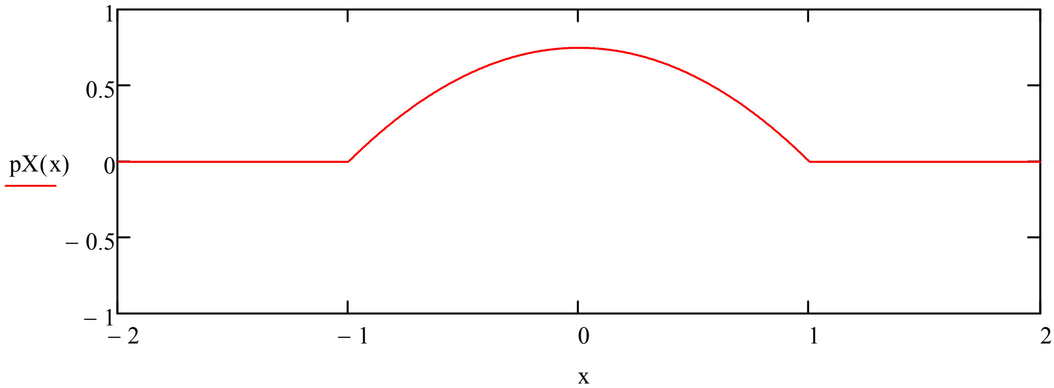
Krzysztof Wesołowski
wydział EAIiE
Automatyka i Robotyka
rok II, grupa 3

Numer zagadnienia: **86**

Przedmiotem zadanie jest analiza zadanego procesu stochastycznego, który przybliże poniżej.

Mamy daną zmienną losową X, o rozkładzie ciągłym, zadanym funkcją:

$$pX(x) := \begin{cases} \left[-\frac{3}{4}\left(x^2 - 1\right)\right] & \text{if } x > -1 \wedge x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

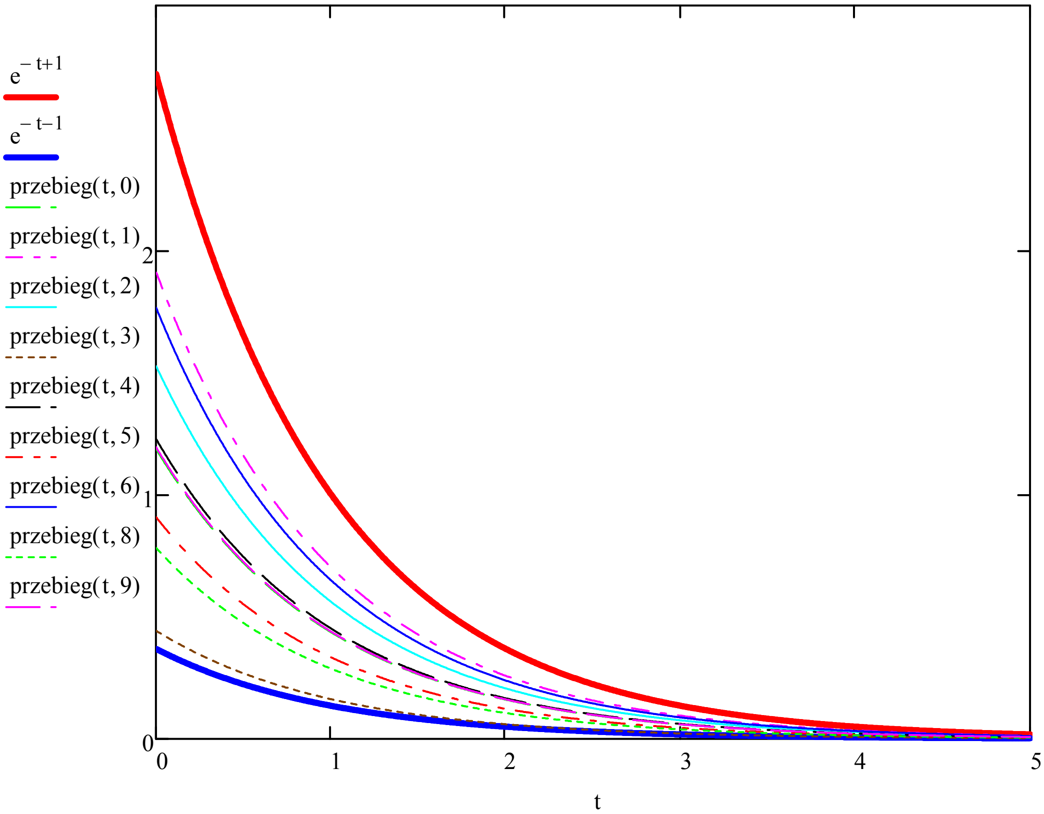


Oraz proces stochastyczny zdefiniowany jako
$Y(t)=e^{-t+X}$
czyli proces obrazujący na przyklad ruch tłumiony, o losowej wartosci poczatkowej/losowym przesunieciu w czasie.

skrajne reazlizacje tego procesu t wykresy funkcji
e^{-t+1} oraz e^{-t-1}
Narysuja kilka możliwych przebiegów procesu:

```
losoweX := | for i ∈ 0..10
           |   | wynik ← rnd(2) − 1
           |   | while pX(wynik) < rnd(3/4)
           |   |   wynik ← rnd(2) − 1
           |   | result_i ← wynik
           | result
```

$$przebieg(t,i) := e^{-t+losoweX_i}$$



Rozwazmy teraz funkcje zmiennej losowej, konkretnie Y(t)=$e^{t+X(t)}$, gdzie X(t) jest w gruncie rzeczy zwykla zmienna losowa, stała niezależnie od t.

$$Y(t) = g(x) = e^{-t+X}$$

mamy wiec funkcje zmiennej losowej postaci Y= e^{-t+X}

znajdźmy informacje potrzebne do wyznaczenia jej rozkladu:

$$\ln(y) = -t + x$$

$$x = \ln(y) + t$$

$$g(x) = e^{-t+X}$$

$$\frac{d}{dx}g(x) = e^{-t+X}$$

Funckja gestosci naszej zmiennej losowej Y dla zadanego czasu wynosi wiec:

$$pY(y,t) := \begin{cases} \dfrac{-\frac{3}{4}\left[(\ln(y)+t)^2 - 1\right]}{\left|e^{-t+(\ln(y)+t)}\right|} & \text{if } -\frac{3}{4}\left[(\ln(y)+t)^2 - 1\right] \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Gdzie zarowno warunek jak i funkcje mozna jeszcze uproscic:

$$\frac{-\frac{3}{4}\left[(\ln(y)+t)^2-1\right]}{\left|e^{-t+(\ln(y)+t)}\right|} = \frac{-\frac{3}{4}\left[(\ln(y)+t)^2-1\right]}{y} = -\frac{3}{4}\cdot\frac{(\ln(y)+t)^2-1}{y}$$

$$-\frac{3}{4}\left[(\ln(y)+t)^2-1\right] \geq 0$$

$$(\ln(y)+t)^2-1 \leq 0$$

$$(\ln(y)+t)^2 \leq 1$$

$$\ln(y)+t \leq 1 \wedge \ln(y)+t > -1$$

$$\ln(y) \leq 1-t \wedge \ln(y) > -1-t$$

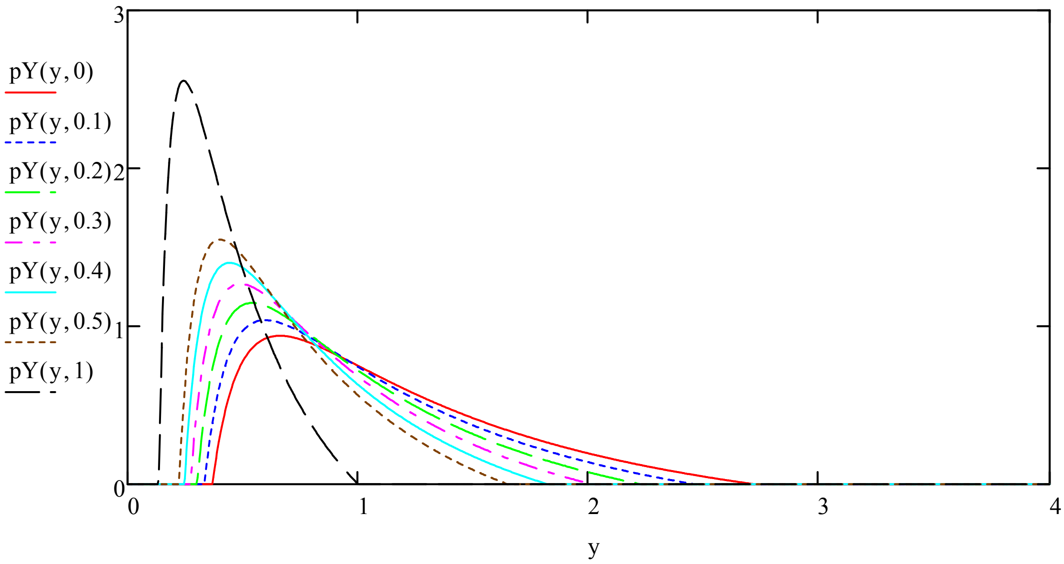
$$y \leq e^{(1-t)} \wedge y > e^{(-1-t)}$$

Ostatecznie więć możemy funkcje gęstiści naszej zmiennej losowej Y zapisać jako:

$$pY(y,t) := \begin{cases} -\frac{3}{4}\cdot\frac{(\ln(y)+t)^2-1}{y} & \text{if } y \leq e^{(1-t)} \wedge y > e^{(-1-t)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

co daje nam dokładny opis przebiegu procesu.

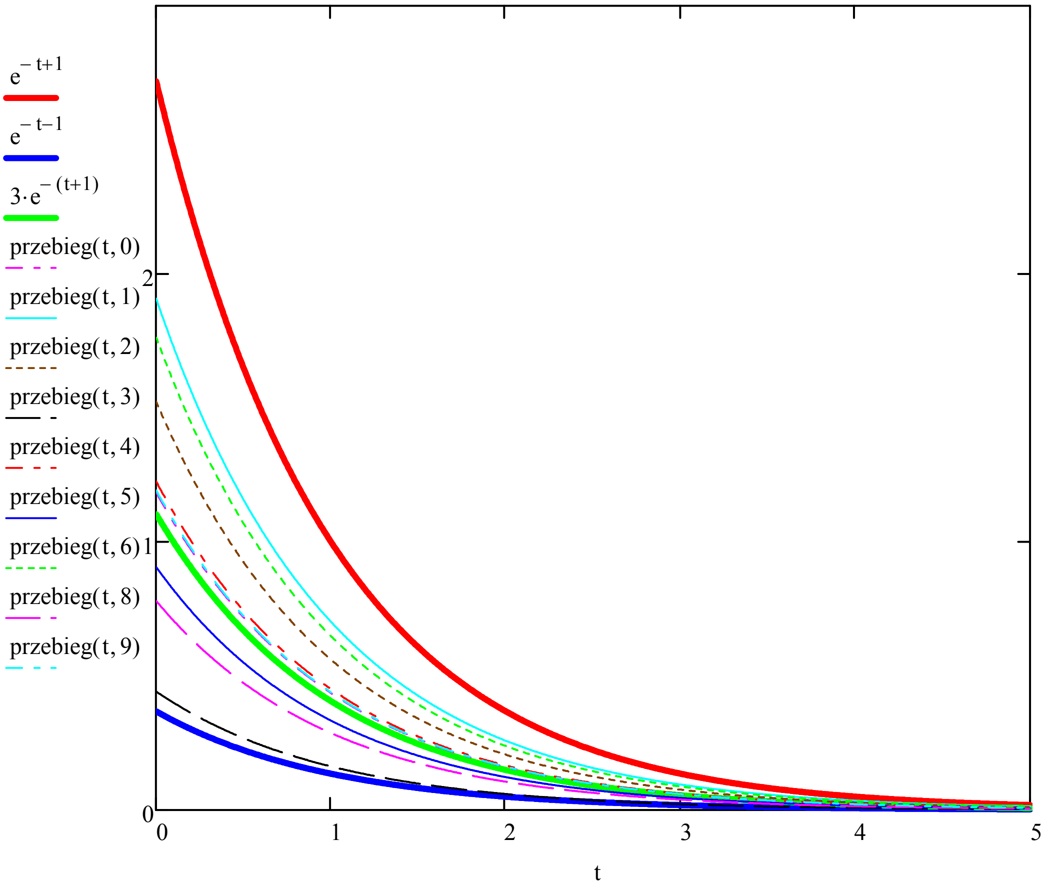
Poniżej zamieszczam funkcję ilustrujące funkcje gęstości da róznych wartosci argumentu t, co odpowiada funkcjom gęstości prawdopodobieństwa zdarzenia takiego ze w chwili t, sygnał y będzie miał daną wartośc.



Obliczmy teraz wartośc oczekiwana naszego sygnału, w funkcji czasu: E[Y(t)]

$$E(Y(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot pY(y,t)\, dy = \int_{e^{(1-t)}}^{e^{(-1-t)}} -\frac{3}{4} \cdot \left[(\ln(y) + t)^2 - 1\right] dy = 3 \cdot e^{-(t+1)}$$

Zaznaczmy teraz wartośc oczekiwaną wśród innych realizacji:



Kolejną wazna informacją o procesie jest jego Autokorelacja:

Tutaj przy użyciu poprzedniej metody całkowania mielibysmy problem z granicami całkowania, dlatego znajdziemy funkcje gestosci rozklady Y(t) w inny sposób, korzystając z dystrybuanty.

$$Fy(t,y) = P(Y(t,\omega) < y) = P\left(e^{-t} \cdot e^{X} < y\right) = P\left(e^{X} < e^{t} \cdot y\right) = P\left(\ln\left(e^{X}\right) < t \cdot \ln(y)\right)$$

$$P\left(\ln\left(e^{X}\right) < t \cdot \ln(y)\right) = P(X < t \cdot \ln(t)) = Fx(t \cdot \ln(y))$$

a więc funkcję gęstości można latwo obliczyć różniczkując:

$$pY(t) = pX(t \cdot \ln(y)) \cdot t \cdot \frac{1}{y}$$

Funkcja ta jest identyczna z poprzednio otrzymana, działa ona w tym samym przedziale, a przy okazji sugeruje uzyteczne w całkowaniu podstawienie (powyższe scałkowal program).

Teraz, wiedząc że zamiast w w wartości oczekiwanej całkować po zmiennej y możemy zamiennie scałkować po zmiennej x łatwo obliczyć współczynnik autokorelacji.

$$Ry(t1,t2) = E(Y(t1)\cdot Y(t2)) = \frac{3}{4}\cdot\int_{-1}^{1} e^{-t1}\cdot e^{x}\cdot e^{-t2}\cdot e^{x}\cdot\left(1-x^2\right)dx = \frac{3}{4}e^{-(t1+t2)}\cdot\int_{-1}^{1} e^{2x}\cdot\left(1-x^2\right)dx$$

$$\frac{3}{4}e^{-(t1+t2)}\cdot\int_{-1}^{1} e^{2x}\cdot\left(1-x^2\right)dx = e^{-(t1+t2)}\cdot\left(\cosh(2)-\frac{1}{2}\,\mathrm{sinx}(2)\right)$$